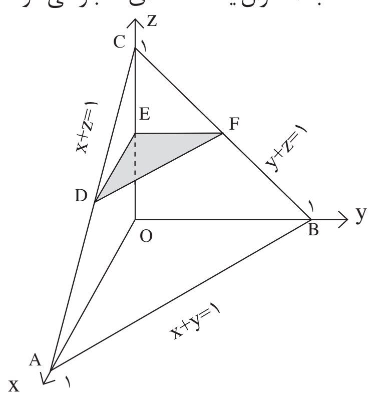
حل یک مسئله با استفاده از

انتگرال‌های یگانه، دوگانه و سه‌گانه

علی‌اکبر جاویدمهر
دبیر ریاضی استان قم

مسئله: حجم چهاروجهی محدود به صفحه‌های مختصات و صفحهٔ $x+y+z=1$ را بیابید.

یگانه: انتگرال یگانه راه مناسبی برای محاسبهٔ حجم این چهاروجهی در اختیار ما قرار می‌دهد. در اینجا مسئله را با روش «برش» (شکل ۱) که به محاسبهٔ انتگرال یگانهٔ ساده‌ای منجر می‌شود، حل می‌کنیم.



شکل ۱

در شکل ۱ واضح است که صفحهٔ ثابت z= c (موازی صفحهٔ xoy) چهاروجهی OABC را در ناحیهٔ DEF قطع می‌کند و DEF یک مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع‌های $x=1-z$ و $y=1-z$ و مساحت $\frac{1}{2}(1-z)^2$ است.

لذا:

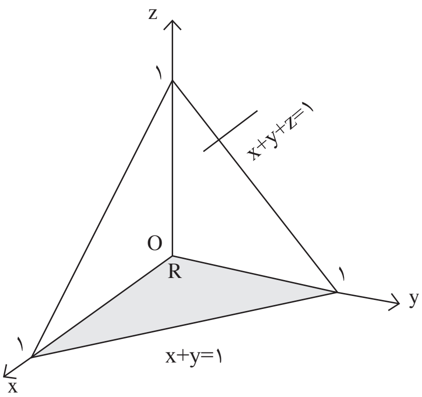
$$v=\frac{1}{2}\int_0^1(1-z)^2dz=-\frac{1}{6}(1-z)^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}$$

دوگانه: با توجه به شکل ۲ واضح است که: $v=\iint_R(1-x-y)dA$ و در آن، R ناحیهٔ مثلثی‌شکل سایه‌دار است که در صفحهٔ xoy به خط‌های x=۰ و y=۰ و x+y=۱ محدود شده است و A مساحت ناحیهٔ R به ازای هر افراز ناحیهٔ R با خط‌های موازی با محورهای مختصات است.

بنابراین:

$$v=\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\int_0^1\left(\left[(1-x)y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2dx=-\frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}$$



شکل ۲

تذکر: اگر f(x,y)=۱ را اختیار کنیم، در این صورت انتگرال دوگانهٔ $\iint_R dA$ دقیقاً همان مساحت ناحیهٔ مثلثی‌شکل R خواهد بود؛ زیرا:

$$\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy=\int_0^1(1-x)dx=-\frac{1}{2}(1-x)^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

دوگانه: چهاروجهی جسمی سه‌بعدی است و از بالا به رویه $z=\varphi_2(x,y)=1-x-y$ و از پایین به $z=\varphi_1(x,y)=0$ محدود است. ناحیهٔ بسته و محدود R در صفحهٔ xoy دارای انتگرال دوگانهٔ $\iint_R f(x,y)dxdy$ است و می‌دانیم که رابطهٔ $z=\varphi_2(x,y)=1-x-y$ معادلهٔ یک سطح در دستگاه کارتزین است. مرز ناحیهٔ بستهٔ R منحنی بسته‌ای مانند C را بر این سطح مشخص می‌کند، به‌طوری که تصویر منحنی C همان مرز R است.

بنابراین:

$$v=\int_0^1\int_0^{1-x}(\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y))dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-x-y)dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

سه‌گانه: با در نظر گرفتن شکل ۲ فرض کنیم: $f(x,y,z)=۱$ و $z=f(x,y)=۱-x-y$

$$v=\int_۰^۱\int_۰^{۱-x}\int_۰^{۱-x-y}dzdydx,\ \int_۰^{۱-x-y}dz=۱-x-y$$

$$\Rightarrow\int_۰^{۱-x}(۱-x-y)dy=(y-xy-\frac{۱}{۲}y^۲)\Big|_۰^{۱-x}$$

$$=\frac{۱}{۲}x^۲-x+\frac{۱}{۲}\Rightarrow v=\int_۰^۱(\frac{۱}{۲}x^۲-x+\frac{۱}{۲})dx\Rightarrow$$

$$v=(\frac{۱}{۶}x^۳-\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۲}x)\Big|_۰^۱=\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}$$

یا:

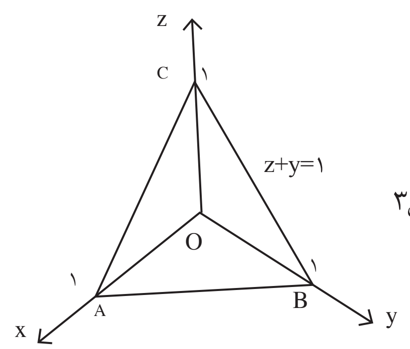
$$v=\int_۰^۱\int_۰^{۱-x}\int_۰^{۱-x-y}dxdydz=\int_۰^۱(\int_۰^{۱-x}(۱-x-y)dy)dx$$

$$=\int_۰^۱\left[(y-xy-\frac{۱}{۲}y^۲)\Big|_۰^{۱-x}\right]dx$$

$$\Rightarrow\quad v=\int_۰^۱(\frac{۱}{۲}-x+\frac{۱}{۲}x^۲)dx=$$

$$(\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۶}x^۳)\Big|_۰^۱=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

عموماً محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه به محاسبهٔ سه انتگرال ساده و متوالی و یا یک انتگرال دوگانه و یک انتگرال ساده منجر می‌شود.



شکل۳

روش چهارم:

بـا توجه به شـکل ۳: $A(۱,۰,۰),\ B(۰,۱,۰),\ C(۰,۰,۱)$ کنج OABC قائمه اسـت و صفحهٔ مثلث ABC با معادلهٔ x+y+z=۱ قاعدهٔ هرم (چهاروجهی) را می‌سازد. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و اندازهٔ هر ضلع آن $BC=AC=AB=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$ (یا $AB=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۰-۱)^۲+(۰-۰)^۲}=\sqrt{۲}$) است.

اگـر h را ارتفاع هرم فرض کنیم کـه از رأس O بر قاعده (یعنی مثلث ABC) رسم می‌شود، اندازهٔ فاصلهٔ O از صفحهٔ مثلث AB مقدار h خواهد بود.

$$O(۰,۰,۰)\Rightarrow h=\frac{|۰+۰+۰-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲+۱^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳},$$

ارتفاع مثلث ABC $h'=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}, a=\sqrt{۲}$

$$h'=\frac{\sqrt{۲}\sqrt{۳}}{۲},\ S_{ABC}=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow S_{ABC}=$$

$$\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲},\ V=\frac{۱}{۳}h.s_{ABC}\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱}{۶}$$

روش پنجم، استفاده از ضرب خارجی بردارها:

حجم هرم OABC که کنج OABC قائمه نیز هست (در حالت کلی لازم نیست قائمه باشد)، با استفاده از حجم متوازی‌السطوح نیز به دست می‌آید:

$$\overline{OA}=(۱,۰,۰),\overline{OB}=(۰,۱,۰),\overline{OC}=(۰,۰,۱),$$

$$\overline{AB}=(-۱,۱,۰),\overline{AC}=(-۱,۰,۱)$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-۱&۱&۰\\-۱&۰&۱\end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=(۱,-۱,۱)$$

حجم متوازی‌السطوح $V_۱=|\overline{OA}.(\overline{AB}\times\overline{AC})|$

$$=|۱(۱)+۰(-۱)+۰(۱)|=۱$$

با توجه به اینکه:

$$\overline{OA}.(\overline{AB}\times\overline{AC})=\overline{OA}.\overline{OB}.\ \overline{OC}=\overline{OA}.(\overline{OB}.\overline{OC})،$$

$\overline{V_۱}$ را می‌توان از دترمینان زیر هم حساب کرد:

$$v_۱=|\overline{OA}.\overline{OB}.\overline{OC}|=\begin{vmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{vmatrix}=۱\Rightarrow$$

$$v=\frac{۱}{۶}v_۱\Rightarrow v=\frac{۱}{۶}\times۱=\frac{۱}{۶}$$

تمرین: حجم جسم محدود به رویه‌های زیر را حساب کنید.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱,\ x=۰,\ y=۰\ ,\ z=۰$$

جواب: $v=\frac{abc}{۶}$

منبع

حسـاب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی جدید، سیلورمن، جلد سوم: کاربرد انتگرال‌های مضاعف، ص ۱۰۱۱ و ص ۱۰۵۸.